ZS a06-049 riešil(a):

1. Vyšetrite priebeh funkcie $f\colon y = \frac{|4x-5|}{x+2}$, $x \in D(f)$ a načrtnite jej graf.

Riešenie:

Výsledky:

$D(f) =$ Nulové body:

Párnosť, nepárnosť, periodickosť:

Spojitosť, body nespojitosti:

Limity v bodoch nespojitosti:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

Kladnosť, zápornosť:

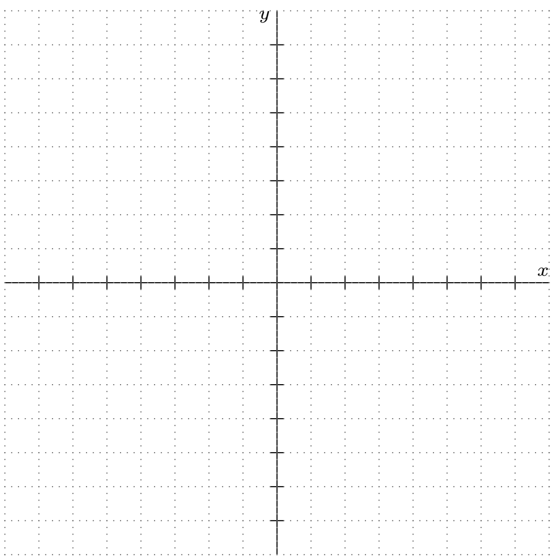
Asymptoty:

$f'(x) =$

Extrémy, monotónnosť:

$f''(x) =$

Inflexné body, konvexnosť, konkávnosť:



Do časti **Riešenie:**, prosím, píšte celý postup riešenia a do časti **Výsledky:** píšte iba výsledky a načrtnite graf funkcie.

—pokračovanie—

2. Vyšetrite priebeh funkcie $f\colon y = \operatorname{arccotg} \frac{3x-3}{x+2}$, $x \in D(f)$ a načrtnite jej graf.

Riešenie:

Výsledky:

$D(f) =$ Nulové body:

Párnosť, nepárnosť, periodickosť:

Spojitosť, body nespojitosti:

Limity v bodoch nespojitosti:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

Kladnosť, zápornosť:

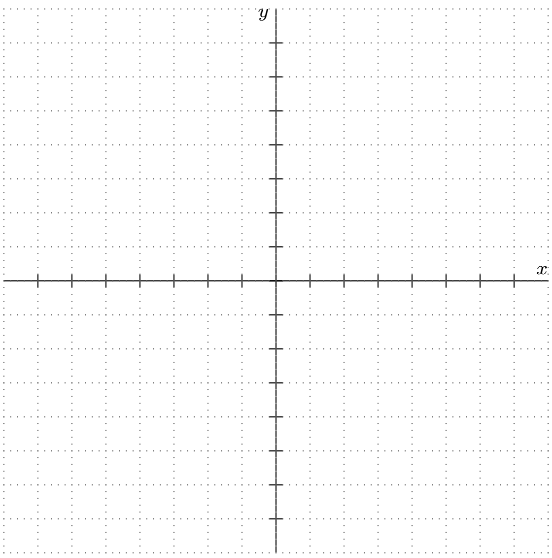
Asymptoty:

$f'(x) =$

Extrémy, monotónnosť:

$f''(x) =$

Inflexné body, konvexnosť, konkávnosť:



Do časti **Riešenie:**, prosím, píšte celý postup riešenia a do časti **Výsledky:** píšte iba výsledky a načrtnite graf funkcie.

7SB do **22.11.12**, 5SB do **29.11.12**, 3SB do **06.12.12**, 1SB do **28.01.13**

Body platia, iba ak sú všetky príklady vyriešené správne.

1

1

$$f: y = \frac{|4x-5|}{x+2}$$

~ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\} = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$

~ priesečníky: $\boxed{\sigma_x : y = 0}$

$$\frac{|4x-5|}{x+2} = 0$$

$$|4x-5| = 0$$

$$x_0 = \frac{5}{4}$$ → nulový bod

$\boxed{\sigma_y : x = 0}$

$$y = \frac{|0-5|}{0+2}$$

$$y_0 = \frac{5}{2}$$

~ nie je periodická

~ $f(x) = \dfrac{|4x-5|}{x+2}$

$$f(-x) = \frac{|-4x-5|}{-x+2}$$

$$-f(x) = \frac{-|4x-5|}{x+2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \neq f(-x) \\ -f(x) \neq f(-x) \end{array}\right\}$$ nie je párna ani nepárna

~ je spojitá na celom $D(f)$, teda na $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ⇒ je nespojitá v bode $x = -2$

① ~ $$\lim_{x\to\infty} \frac{|4x-5|}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left|4-\frac{5}{x}\right|}{1+\frac{2}{x}} = \frac{4}{1} = \underline{\underline{4}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|4x-5|}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left|\frac{4x-5}{\sqrt{x^2}}\right|}{\frac{x+2}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left|4-\frac{5}{x}\right|}{-1+\frac{2}{|x|}} = \underline{\underline{-4}}$$

~ $y = \frac{|4x-5|}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x+2>0 \Leftrightarrow x>-2 \Rightarrow$ funkcia je kladná na $(-2;\infty)$

<u>záporná na $(-\infty;-2)$</u>

~ Asymptoty: asymp. bez smernice: $\boxed{x=-2}$

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{|4x-5|}{x\cdot(x+2)} = 0 \qquad q_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{|4x-5|}{x+2} = 4$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{|4x-5|}{x(x+2)} = 0 \qquad q_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{|4x-5|}{x+2} = -4$$

$\Rightarrow$ asymp. so smernicou: $\boxed{y=4\ ,\ y=-4}$

3

① ~ $$f'(x)=\left(\frac{|4x-5|}{x+2}\right)'=\left(\frac{\sqrt{(4x-5)^2}}{x+2}\right)'=\left(\frac{\sqrt{16x^2-40x+25}}{x+2}\right)'=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot(16x^2-40x+25)^{-\frac{1}{2}}\cdot(32x-40)\cdot(x+2)-\sqrt{16x^2-40x+25}\cdot 1}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{\frac{(32x-40)(x+2)}{2\cdot|4x-5|}-|4x-5|}{(x+2)^2}=\frac{\frac{32x^2+24x-80-2\cdot(4x-5)^2}{2\cdot|4x-5|}}{\frac{(x+2)^2}{1}}=$$

$$=\frac{32x^2+24x-80-2\cdot(16x^2-40x+25)}{2\cdot(x+2)^2\cdot|4x-5|}=\frac{\cancel{2}\cdot[16x^2+12x-40-16x^2+40x-25]}{\cancel{2}\cdot(x+2)^2\cdot|4x-5|}=$$

$$=\frac{52x-65}{(x+2)^2\cdot|4x-5|}=\underline{\underline{\frac{13\cdot(4x-5)}{(x+2)^2\cdot|4x-5|}}}=0\iff 4x-5=0\iff \underbrace{x_0=\frac{5}{4}}$$

stacionárny bod

~ $$y'>0\iff\frac{13(4x-5)}{(x+2)^2\cdot|4x-5|}>0\iff 4x-5>0\iff x>\frac{5}{4}$$

funkcia na $\left(\frac{5}{4};\infty\right)$ rastie

na $(-\infty;-2)$ a $\left(-2;\frac{5}{4}\right)$ klesá

monotónnosť →

1

$$y'' = \left(\frac{13\cdot(4x-5)}{(x+2)^2\cdot|4x-5|}\right)' = \left(\frac{13\cdot(4x-5)}{(x+2)^2\cdot\sqrt{16x^2-40x+25}}\right)' =$$

$$= \frac{13\cdot 4\cdot(x+2)^2\cdot|4x-5| - 13\cdot(4x-5)\cdot\left[2(x+2)\cdot|4x-5| + (x+2)^2\cdot\frac{1}{2}(16x^2-40x+25)^{-\frac{1}{2}}\cdot(32x-40)\right]}{(x+2)^4\cdot(4x-5)^2} =$$

$$= \frac{13\cdot\left[4\cdot(x+2)^2\cdot|4x-5| - (4x-5)\cdot\left[2(x+2)\cdot|4x-5| + \frac{(x+2)^2\cdot(32x-40)}{2\cdot|4x-5|}\right]\right]}{(x+2)^4\cdot(4x-5)^2} =$$

$$= \frac{13\cdot\cancel{(x+2)}\cdot\left[4(x+2)\cdot|4x-5| - 2\cdot(4x-5)\cdot|4x-5| - \frac{(x+2)\cdot 8\cdot(4x-5)^2}{2\cdot|4x-5|}\right]}{(x+2)^4\cdot(4x-5)^2} =$$

$$= \frac{13\cdot|4x-5|\cdot\left[4(x+2) - 2\cdot(4x-5) - 4\cdot(x+2)\right]}{(x+2)^3\cdot(4x-5)^2} = \underline{\underline{\frac{-26\cdot(4x-5)}{(x+2)^3\cdot|4x-5|}}}$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 4x-5=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_0 = \frac{5}{4}}} \rightsquigarrow \text{inflexný bod}$$

5

① ~ $y''\left(\frac{5}{4}\right) \nexists$ ⇒ nevieme určiť, či má funkcia v stacionárnom bode $x_0=\frac{5}{4}$ lok. extrém

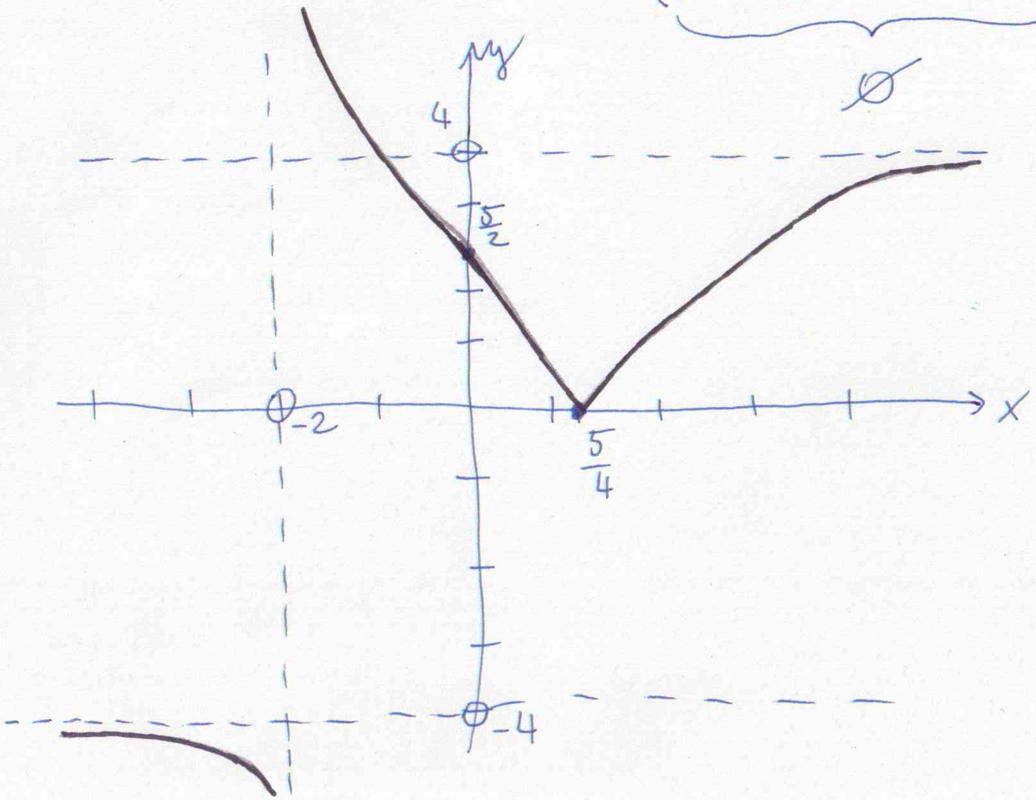
(ukáže až graf)

~ $$y'' = \frac{-26\cdot(4x-5)}{(x+2)^3\cdot|4x-5|} > 0 \iff \frac{4x-5}{(x+2)^3} < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(4x-5>0 \wedge x+2<0) \vee (4x-5<0 \wedge x+2>0)$$

$$\underbrace{\left(x>\frac{5}{4} \wedge x<-2\right)}_{\emptyset} \vee \underbrace{\left(x<\frac{5}{4} \wedge x>-2\right)}$$



⇒ funkcia je konvexná na $\left(-2;\frac{5}{4}\right)$

konkávna na $(-\infty;-2)$ a $\left(\frac{5}{4};\infty\right)$

② $f: y = \text{arc cotg} \frac{3x-3}{x+2}$ 6

~ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\} = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$

~ priesečníky: $\boxed{\sigma_x : y = 0}$ $\boxed{\sigma_y : x = 0}$

$0 = \text{arc cotg} \frac{3x-3}{x+2} \quad / \text{cotg}$

$\text{cotg}\, 0 = \frac{3x-3}{x+2}$

$\text{cotg}\, 0 \not\exists \Rightarrow$ priesečník s osou x $\not\exists$

$y = \text{arc cotg} \frac{3 \cdot 0 - 3}{0+2}$

$y_0 = \text{arccotg} \left(-\frac{3}{2}\right) \doteq 2{,}6$

~ nie je periodická

~ $f(x) = \text{arc cotg} \frac{3x-3}{x+2}$

$f(-x) = \text{arccotg} \frac{-3x-3}{-x+2}$

$-f(x) = -\text{arccotg} \frac{3x-3}{x+2}$

$\left.\begin{array}{l} f(x) \neq f(-x) \\ -f(x) \neq f(-x) \end{array}\right\} \Rightarrow$ nie je párna ani nepárna

7

(2)

~ funkcia je spojitá na celom $D(f)$, teda na $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ $\Rightarrow$ je nespojitá v bode $x=-2$

~ $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arccotg} \dfrac{3x-3}{x+2} = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arccotg} \dfrac{3-\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \operatorname{arccotg} 3 \doteq 0{,}3$

~ $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} \dfrac{3x-3}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} \dfrac{3-\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \operatorname{arccotg} 3 \doteq 0{,}3$

~ $\operatorname{arccotg} \dfrac{3x-3}{x+2} > 0$ vždy $\Rightarrow$ funkcia je kladná na celom $D(f)$

~ Asymptoty: asym. bez smernice: $\boxed{x=-2}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arccotg} \dfrac{3x-3}{x+2} = \operatorname{arccotg} 3 \doteq 0{,}3$ $\Rightarrow$ asymp. so smernicou:

$\boxed{y = \operatorname{arccotg} 3}$

② $\sim f'(x) = \left(\operatorname{arc\,cotg} \frac{3x-3}{x+2}\right)' = \frac{-1}{1+\left(\frac{3x-3}{x+2}\right)^2} \cdot \frac{3(x+2)-(3x-3)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{-1\cdot(3x+6-3x+3)}{\frac{(x+2)^2+(3x-3)^2}{\cancel{(x+2)^2}}\cdot\cancel{(x+2)^2}} =$

$$= \frac{-9}{(x+2)^2+(3x-3)^2} \neq 0 \text{ nikdy} \Rightarrow \text{funkcia nemá stacionárny bod ani lokálne extrémy}$$

$\sim y' > 0 \Leftrightarrow \frac{-9}{(x+2)^2+(3x-3)^2} > 0$ a to nenastane nikdy (čitateľ je záporný, menovateľ kladný)

$\Rightarrow$ klesá na celom $D(f)$

$$\sim y'' = \left(\frac{-9}{x^2+4x+4+9x^2-18x+9}\right)' = \left(\frac{-9}{10x^2-14x+13}\right)' = -9\cdot\left[(10x^2-14x+13)^{-1}\right]' =$$

$$= 9\cdot(10x^2-14x+13)^{-2}\cdot(20x-14) = \frac{18(10x-7)}{(10x^2-14x+13)^2}$$

②

~ $y'' = 0 \Leftrightarrow 10x - 7 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_0 = \frac{7}{10}}}$ ⇝ inflexný bod

~ $y'' = \dfrac{18(10x-7)}{(10x^2-14x+13)^2} > 0 \Leftrightarrow 10x-7 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{7}{10}$ ⇒ funkcia je konvexná na $\left(\frac{7}{10}; \infty\right)$

f. je konkávna na $\underline{\underline{(-\infty; -2) \cup \left(-2; \frac{7}{10}\right)}}$