5.1. Nájdite intervaly monotónnosti funkcie f.

a) $f: y = 2x^2 + x - 6$

b) $f: y = x^3 - 27x$

c) $f: y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 2$

d) $f: y = 1 - 12x - 9x^2 - 2x^3$

e) $f: y = 3 - 2x^2 + 4x^4$

f) $f: y = \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 1$

g) $f: y = \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5}$

h) $f: y = \frac{2}{x^2 + 1}$

i) $f: y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

j) $f: y = \frac{2}{1 - x^2}$

k) $f: y = \frac{x - 1}{x^2}$

l) $f: y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$

m) $f: y = \frac{x^2}{2 - x}$

n) $f: y = x + \frac{x}{x^2 - 1}$

5.2. Nájdite intervaly monotónnosti funkcie f.

a) $f: y = \sqrt{1 - x}$

b) $f: y = \sqrt[3]{(x + 2)^2}$

c) $f: y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$

d) $f: y = (x - 3) \cdot \sqrt{x}$

e) $f: y = x \cdot \sqrt{1 - x}$

f) $f: y = x \cdot \sqrt{1 + x^2}$

g) $f: y = \frac{x - 3}{\sqrt{1 + x^2}}$

h) $f: y = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$

i) $f: y = \frac{2}{3}x + \sqrt[3]{x^2}$

j) $f: y = 2x - 3 \cdot \sqrt[3]{(1 - x)^2}$

k) $f: y = x + e^{-x}$

l) $f: y = 2^{x^2 - 6x + 2}$

m) $f: y = \frac{e^{2x - x^2}}{2}$

n) $f: y = x \cdot e^x$

5.3. Nájdite intervaly monotónnosti funkcie f.

a) $f: y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

b) $f: y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

c) $f: y = (1 + x^2) \cdot e^{-x^2}$

d) $f: y = \frac{e^x}{x + 1}$

e) $f: y = x - 2\ln x$

f) $f: y = 2x^2 - \ln x$

g) $f: y = \ln(1 - x)$

h) $f: y = \ln(x^2 - 4)$

i) $f: y = x \cdot \ln x$

j) $f: y = \frac{\ln x}{x}$

k) $f: y = \frac{\ln(3 - x)}{3 - x}$

l) $f: y = \ln\left(\frac{x + 2}{2 - x}\right)$

m) $f: y = \frac{2}{x} + \ln x^2$

n) $f: y = \frac{x}{\ln x}$

Teória: Aplikácie derivácie funkcie:

1. Monotónnosť: pre všetky $x \in D(f)$ také, že $f'(x) > 0$ platí, že funkcia rastie

pre $\forall x \in (a,b)$: $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ na (a,b) klesá

2. Konvexnosť, konkávnosť: pre $\forall x \in (a,b)$: $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ je na (a,b) konvexná

pre $\forall x \in (a,b)$: $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ je na (a,b) konkávna

3. Lokálne extrémy: pre $\forall x_0 \in D(f)$: $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f(x)$ má v bode x_0 lokálny extrém

x_0 sa nazýva stacionárny bod

ak $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ má v x_0 lokálne minimum

ak $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ má v x_0 lokálne maximum

4. Inflexné body: pre $\forall x_0 \in D(f)$: $f''(x_0) = 0 \Rightarrow f(x)$ sa mení v x_0 z konvexnej na konkávnu (alebo opačne)

x_0 sa nazýva inflexný bod

5.1

a) $f: y = 2x^2 + x - 6$

$f': y' = 4x + 1 > 0 \quad /-1$ → položíme deriváciu >0 a zisťujeme, pre ktoré $\underline{x}$ to platí

$4x > -1 \quad /:4$

$x > -\frac{1}{4}$ ⇒ na intervale $(-\frac{1}{4}; \infty)$ funkcia $f(x)$ rastie

na opačnom intervale, t.j. na $(-\infty; -\frac{1}{4})$ funkcia $f(x)$ klesá

b) $f: y = x^3 - 27x$

$y' = 3x^2 - 27 > 0 \quad /:3$

$x^2 - 9 > 0$

$(x+3)(x-3) > 0 \Rightarrow (x+3>0 \wedge x-3>0) \vee (x+3<0 \wedge x-3<0)$

$(x>-3 \wedge x>3) \vee (x<-3 \wedge x<3)$

⇒ na $(-\infty; -3)$ a na $(3; \infty)$ funkcia rastie

na $(-3; 3)$ funkcia klesá

c) $f: y = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 2$

$y' = 12x^2 + 6x - 6 > 0 \quad /:6$

$2x^2 + x - 1 > 0$

$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9$

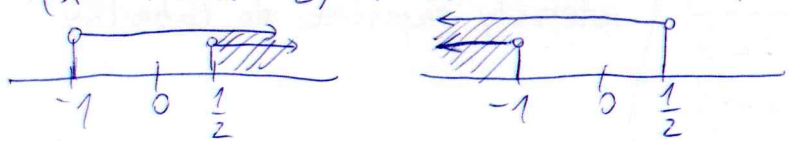
$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \left\langle \begin{matrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right.$

$2x^2 + x - 1 = 2 \cdot (x+1) \cdot (x - \frac{1}{2}) > 0 \quad /:2$

$(x+1)(x-\frac{1}{2}) > 0$

$(x+1>0 \wedge x-\frac{1}{2}>0) \vee (x+1<0 \wedge x-\frac{1}{2}<0)$

$(x>-1 \wedge x>\frac{1}{2}) \vee (x<-1 \wedge x<\frac{1}{2})$



⇒ na $(-\infty; -1)$ a na $(\frac{1}{2}; \infty)$ rastie

na $(-1; \frac{1}{2})$ klesá

5.1

d) $f: y = 1 - 12x - 9x^2 - 2x^3$

$y' = -12 - 18x - 6x^2 > 0 \quad /:(-6)$

$x^2 + 3x + 2 < 0$

$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow (x+1)(x+2) < 0$

$(x < -1 \wedge x > -2) \vee (x > -1 \vee x < -2)$

$\Rightarrow$ na $(-2; -1)$ funkcia rastie

$\Rightarrow$ na $(-\infty; -2)$ a na $(-1; \infty)$ klesá

e) $f: y = 3 - 2x^2 + 4x^4$

$y' = -4x + 16x^3 > 0 \quad /:(+4)$

$4x^3 - x > 0$

$x \cdot (4x^2 - 1) > 0$

$x \cdot (2x-1) \cdot (2x+1) > 0$

zistíme nulové body pre všetky členy, t.j. kedy sa daný člen $= 0$:

$x = 0$

$2x - 1 = 0$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

$2x + 1 = 0$

$2x = -1$

$x = -\frac{1}{2}$

tieto 3 čísla nám rozdelia číselnú os na niekoľko intervalov; intervaly zapíšeme do tabuľky

	$(-\infty; -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}; 0)$	$(0; \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}; \infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$2x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
súčin	$-$	$+$	$-$	$+$

v tomto riadku vynásobíme znamienka z daného stĺpca, napr. $\ominus \cdot \ominus \cdot \ominus = \ominus$ atď... a zakrúžkujeme tie, kde je $\oplus$, lebo tam je súčin > 0

$\rightarrow$ zvolíme si ľubovoľné číslo z daného intervalu a dosadíme ho do daného člena (výrazu); podľa toho aké číslo nám vyjde, zapíšeme znamienko tohto výsledku do tabuľky

~ z 1. intervalu si zvolíme napr. -1000

z 2. si zvolíme $-0{,}25$

z 3. zvolíme $0{,}25$

zo 4. zvolíme 10

(5.1) e) vidíme, že súčin je ⊕, teda kladný v dvoch prípadoch ⇒ na $(-\frac{1}{2}; 0)$ a na $(\frac{1}{2}; \infty)$ funkcia rastie
na $(-\infty; -\frac{1}{2})$ a na $(0; \frac{1}{2})$ funkcia klesá

f) $f: y = \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 1$

$y' = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 - \frac{4}{3} \cdot 3x^2 = x^4 - 4x^2 > 0$

$x^2 \cdot (x^2 - 4) > 0$

$x^2 \cdot (x-2) \cdot (x+2) > 0$

x^2 je > 0 vždy a teda na znamienko súčinu má vplyv len súčin $(x-2) \cdot (x+2) > 0 \Rightarrow (x > 2 \wedge x > -2) \vee (x < 2 \wedge x < -2)$

$(2; \infty) \quad \cup \quad (-\infty; -2)$

⇒ funkcia na $(-\infty; -2)$ a na $(2; \infty)$ rastie
a na $(-2; 2)$ klesá

g) $f: y = \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5}$

$y' = \frac{1}{6} \cdot 6x^5 + \frac{1}{5} \cdot 5x^4 = x^5 + x^4 > 0$

$x^4 \cdot (x+1) > 0$ → zase, $x^4 > 0$ vždy ⇒ $x + 1 > 0$

$\underline{x > -1}$ ⇒ na $(-1; \infty)$ funkcia rastie
na $(-\infty; -1)$ funkcia klesá

5.1

h) $f: y = \frac{2}{x^2+1}$

$$y' = \frac{-2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} > 0 \quad /:(-4)$$

$\frac{x}{(x^2+1)^2} < 0 \rightarrow$ menovateľ je vždy $>0 \Rightarrow$ zaujíma nás len kedy $x<0 \Rightarrow$ na $(-\infty;0)$ rastie

na $(0;\infty)$ klesá

i) $f: y = \frac{2x}{x^2+1}$

$$y' = \frac{2\cdot(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{\overset{-2\cdot(x^2-1)}{-2x^2+2}}{(x^2+1)^2} > 0 \quad /:(-2)$$

$\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2} < 0 \rightarrow$ menovateľ je vždy kladný a teda čitateľ musí <0

$(x+1)(x-1)<0$

$(x>-1 \wedge x<1) \vee (x<-1 \wedge x>1)$

$(-1;1)$ $\quad \emptyset$ $\Rightarrow$ na $(-1;1)$ rastie

na $(-\infty;-1)$ a $(1;\infty)$ klesá

j) $f: y = \frac{2}{1-x^2}$

$$y' = \frac{-2\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2} > 0 \rightarrow$$ menovateľ vždy kladný a teda zisťujeme, kedy čitateľ >0: $4x>0 \quad /:4$

$x>0 \Rightarrow$ na $(0;\infty)$ rastie

na $(-\infty;0)$ klesá

5.1

k) $f: y = \frac{x-1}{x^2}$

$$y' = \frac{1\cdot x^2 - (x-1)\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x^2-2x^2+2x}{x^4} = \frac{-x^2+2x}{x^4} > 0 \rightarrow$$

menovateľ vždy >0:

$-x^2+2x > 0$

$-x\cdot(x-2) > 0 \quad /:(-1)$

$x\cdot(x-2) < 0$

$(x<0 \wedge x>2) \vee (x>0 \wedge x<2)$

$\emptyset \qquad (0;2)$

$\Rightarrow$ na $(0;2)$ rastie

na $(-\infty;0)$ a $(2;\infty)$ klesá

l) $f: y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} = 2\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot x = 2x^{-1} + \frac{1}{2}x$

$$y' = -2x^{-2} + \frac{1}{2} = \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{-4+x^2}{2x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2} > 0 \rightarrow$$

menovateľ $>0 \ \forall x$

$x^2-4 > 0$

$(x+2)(x-2) > 0$

$(x>-2 \wedge x>2) \vee (x<-2 \wedge x<2)$

$(2;\infty) \quad \cup \quad (-\infty;-2)$ $\Rightarrow$ na $(-\infty;-2)$ a $(2;\infty)$ rastie

na $(-2;2)$ klesá

m) $f: y = \frac{x^2}{2-x}$

$$y' = \frac{2x\cdot(2-x) - x^2\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4x-2x^2+x^2}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x}{(2-x)^2} > 0 \rightarrow$$

menovateľ $>0 \ \forall x$

$-x^2+4x > 0$

$-x\cdot(x-4) > 0 \quad /:(-1)$

$x\cdot(x-4) < 0$

$(x<0 \wedge x>4) \vee (x>0 \wedge x<4)$

$\emptyset \qquad (0;4)$

na $(0;4)$ rastie

na $(-\infty;0)$ a $(4;\infty)$ klesá

5.1

m) $f: y = x + \frac{x}{x^2-1} = \frac{x\cdot(x^2-1)+x}{x^2-1} = \frac{x\cdot[(x^2-1)+1]}{x^2-1} = \frac{x^3}{x^2-1}$

$y' = \frac{3x^2\cdot(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} > 0 \rightarrow$

menovateľ $>0 \ \forall x$

$x^4-3x^2>0$

$x^2\cdot(x^2-3)>0 \rightarrow x^2>0 \ \forall x$

$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})>0$

$(x>-\sqrt{3} \wedge x>\sqrt{3}) \vee (x<-\sqrt{3} \wedge x<\sqrt{3})$

$(\sqrt{3};\infty) \quad \cup \quad (-\infty;-\sqrt{3})$

$\Rightarrow$ na $(-\infty;-\sqrt{3})$ a na $(\sqrt{3};\infty)$ funkcia rastie

na $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$ funkcia klesá

5.2

a) $f: y = \sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) = \frac{-1}{2\cdot\sqrt{1-x}} > 0 \rightarrow$ odmocnina je vždy $>0 \Rightarrow$ menovateľ >0 zároveň čitateľ $=-1<0$ vždy $\Rightarrow$ zlomok je vždy záporný a funkcia klesá na celom $D(f)$

b): $f: y = \sqrt[3]{(x+2)^2} = (x+2)^{\frac{2}{3}}$

$y' = \frac{2}{3}(x+2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x+2}} > 0 \rightarrow$ $2>0$ vždy a teda zisťujeme, kedy menovateľ >0:

$3\cdot\sqrt[3]{x+2} > 0 \;/:3$

$\sqrt[3]{x+2} > 0 \;/^3$

$x+2 > 0$

$\boxed{x > -2} \Rightarrow$ na $(-2;\infty)$ rastie

na $(-\infty;-2)$ klesá

c) $f: y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$; $D(f)$: $\frac{1+x}{1-x} \geq 0 \quad \wedge \quad 1-x \neq 0$

$\boxed{x \neq 1}$

$(1+x \geq 0 \wedge 1-x > 0) \vee (1+x \leq 0 \wedge 1-x < 0)$

$(x \geq -1 \wedge x < 1) \vee (x \leq -1 \wedge x > 1)$

$\langle -1; 1) \qquad \emptyset \qquad \Rightarrow \boxed{D(f) = \langle -1; 1)}$

$y' = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} > 0$ vždy, lebo $\sqrt{\;} > 0 \wedge (1-x)^2 > 0$

$\boxed{\text{vzorec: } \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}}$

$\Rightarrow$ funkcia rastie na $\langle -1; 1)$

5.2 d) $f: y = (x-3)\cdot\sqrt{x}$; $\boxed{D(f) = \langle 0; \infty)}$ lebo $x \geq 0$

$$y' = 1\cdot x^{\frac{1}{2}} + (x-3)\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x} + \frac{x-3}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{2x+x-3}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\cdot\sqrt{x}} > 0 \nearrow$$

menovateľ vždy > 0

$3x-3 > 0 \quad /:3$

$x-1 > 0 \quad /+1$

$\underline{x > 1}$

$\Rightarrow$ funkcia rastie na $(1; \infty)$

klesá na $\langle 0; 1)$

e) $f: y = x\cdot\sqrt{1-x}$; $D(f)$: $1-x \geq 0$

$x \leq 1 \Rightarrow \boxed{D(f) = (-\infty; 1\rangle}$

$$y' = \left[x\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]' = 1\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}} + x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1) = \sqrt{1-x} - \frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\cdot\sqrt{1-x}} = \frac{2\cdot(1-x)-x}{2\cdot\sqrt{1-x}} =$$

$$= \frac{2-2x-x}{2\cdot\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\cdot\sqrt{1-x}} > 0 \iff 2-3x > 0$$

$3x < 2$

$\boxed{x < \frac{2}{3}} \Rightarrow$ na $(-\infty; \frac{2}{3})$ rastie

na $(\frac{2}{3}; 1\rangle$ klesá

f) $f: y = x\cdot\sqrt{1+x^2}$; $D(f)$: $1+x^2 \geq 0$ platí vždy $\Rightarrow \boxed{D(f) = (-\infty; \infty)}$

$$y' = \left[x\cdot(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = 1\cdot(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + \cancel{x}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}x = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\rightarrow$ všetky členy sú vždy ≥ 0

$\Rightarrow$ funkcia rastie na $(-\infty; \infty)$

5.2

g) $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x-3}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$; $\boxed{D(f) = \mathbb{R}} = (-\infty; \infty)$

$$y' = \frac{1\cdot(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - (x-3)\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - x(x-3)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x(x-3)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} > 0$$

menovateľ > 0 vždy

$$\Rightarrow \sqrt{} - \frac{x(x-3)}{\sqrt{}} > 0$$

$$\frac{1+x^2 - x(x-3)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x^2-x^2+3x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{3x+1}{\sqrt{1+x^2}} > 0 \Leftrightarrow 3x+1 > 0$$

$\boxed{x > -\frac{1}{3}}$ $\Rightarrow$ rastie na $(-\frac{1}{3}; \infty)$

klesá na $(-\infty; -\frac{1}{3})$

h) $f: y = x\cdot\sqrt{4-x^2} = x\cdot(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$; $D(f)$: $4-x^2 \geq 0$

$(2-x)(2+x) \geq 0$

$(2-x \geq 0 \wedge 2+x \geq 0) \vee (2-x \leq 0 \wedge 2+x \leq 0) \Rightarrow \boxed{D(f) = \langle -2; 2 \rangle}$

$$y' = 1\cdot(4-x^2)^{\frac{1}{2}} + x\cdot\frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4-2x^2 > 0$

$2x^2 < 4$

$x^2 < 2 \Rightarrow x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \Rightarrow$ rastie na $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

klesá na $\langle -2; -\sqrt{2})$ a na $(\sqrt{2}; 2\rangle$

$(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x) > 0$

...

5.2

i) $f: y = \frac{2}{3}x + \sqrt[3]{x^2} = \frac{2}{3}x + x^{\frac{2}{3}}$; $\boxed{D(f) = \mathbb{R}}$

párne odmocniny existujú len z nezáporných čísel ($\sqrt{4}$; $\sqrt[4]{5}$; ...)

nepárne odmocniny existujú zo $\forall$ čísel ($\sqrt[3]{7}$; $\sqrt[5]{-2}$; ...)

$$y' = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) > 0 \quad /:\frac{2}{3}$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} > 0$$

$$\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}} > 0 \iff (\sqrt[3]{x}+1>0 \wedge \sqrt[3]{x}>0) \vee (\sqrt[3]{x}+1<0 \wedge \sqrt[3]{x}<0)$$

$$(\sqrt[3]{x}>-1 \wedge \sqrt[3]{x}>0) \vee (\sqrt[3]{x}<-1 \wedge \sqrt[3]{x}<0)$$

$$\sqrt[3]{x}>0 \qquad \sqrt[3]{x}<-1$$

$$x>0 \quad \cup \quad x<-1 \Rightarrow \text{na } (-\infty;-1) \text{ a } (0;\infty) \text{ rastie}$$

na $(-1;0)$ klesá

j) $f: y = 2x - 3\cdot\sqrt[3]{(1-x)^2} = 2x - 3\cdot(1-x)^{\frac{2}{3}}$; $\boxed{D(f) = \mathbb{R}}$

$$y' = 2 - 3\cdot\frac{2}{3}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{3}}\cdot(-1) = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{1-x}} > 0$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{1-x}} > -2 \quad /:2$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} > -1$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} + 1 > 0$$

$$\frac{1+\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x}} > 0 \iff (1+\sqrt[3]{\ }>0 \wedge \sqrt[3]{\ }>0) \vee (1+\sqrt[3]{\ }<0 \wedge \sqrt[3]{\ }<0)$$

$$\sqrt[3]{1-x}>0 \;/^3 \quad \vee \quad \sqrt[3]{1-x}<-1 \;/^3$$

$$1-x>0 \qquad 1-x<-1$$

$$\boxed{x<1} \quad \vee \quad \boxed{x>2}$$

na $(-\infty;1) \cup (2;\infty)$ rastie

na $(1;2)$ klesá

5.2

k) $f: y = x + e^{-x}$; $\boxed{D(f) = \mathbb{R}}$

$y' = 1 + e^{-x} \cdot (-1) = 1 - e^{-x} > 0$

$e^{-x} < 1$ /zlogaritmujeme

$\ln e^{-x} < \ln 1 \rightarrow \boxed{\log_a a^x = x \; ; \; \log_a 1 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}}$!

$-x < 0$

$\boxed{x > 0} \Rightarrow$ na $(0; \infty)$ rastie

na $(-\infty; 0)$ klesá

l) $f: y = 2^{x^2 - 6x + 2}$; $\boxed{D(f) = \mathbb{R}}$

$y' = 2^{x^2-6x+2} \cdot \ln 2 \cdot (2x - 6) \rightarrow$ 2 umocnené na kocíro > 0

$\ln 2 \doteq 0{,}7 > 0$

$\searrow > 0 \Leftrightarrow 2x - 6 > 0$

$2x > 6$

$\boxed{x > 3} \Rightarrow$ na $(3; \infty)$ rastie

na $(-\infty; 3)$ klesá

m) $f: y = \dfrac{e^{2x - x^2}}{2} = \frac{1}{2} e^{2x - x^2}$; $\boxed{D(f) = \mathbb{R}}$

$y' = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot e^{2x - x^2}}_{> 0} \cdot (2 - 2x) > 0 \Leftrightarrow 2 - 2x > 0$

$\boxed{x < 1} \Rightarrow$ na $(-\infty; 1)$ rastie

na $(1; \infty)$ klesá

5.2 m) $f: y = x \cdot e^x$; $\boxed{D(f) = \mathbb{R}}$

$$y' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underset{>0}{e^x} \cdot (x+1) > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0$$

$\boxed{x > -1} \Rightarrow$ na $(-1;\infty)$ rastie

na $(-\infty;-1)$ klesá

5.3 a) $f: y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$; $\boxed{D(f) = (-\infty;0) \cup (0;\infty)}$

$$y' = 1 \cdot e^{\frac{1}{x}} + x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot (-x^{-2}) = e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x}{-x^2} = \underset{>0}{e^{\frac{1}{x}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0$$

$(x-1>0 \wedge x>0) \vee (x-1<0 \wedge x<0)$

$(1;\infty)$ $\quad$ $(-\infty;0)$

$\Rightarrow$ na $(-\infty;0)$ a na $(1;\infty)$ rastie

na $(0;1)$ klesá

b) $f: y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; $\boxed{D(f) = \mathbb{R}}$

$$y' = 1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 2x\right) = \underset{>0}{e^{-\frac{x^2}{2}}} \cdot (1 - x^2) > 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) > 0$$

$(1+x>0 \wedge 1-x>0) \vee (1+x<0 \wedge 1-x<0)$

$(x>-1 \wedge x<1) \vee (x<-1 \wedge x>1)$

$(-1;1)$ $\quad$ $\emptyset$

$\Rightarrow$ na $(-1;1)$ rastie

na $(-\infty;-1)$ a na $(1;\infty)$ klesá

5.3

c) $f: y = (1+x^2)\cdot e^{-x^2}$; $\boxed{D(f) = \mathbb{R}}$

$$y' = 2x\cdot(e^{-x^2}) + (1+x^2)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x) = e^{-x^2}\cdot\left(2x + (1+x^2)\cdot(-2x)\right) = 2x\cdot e^{-x^2}\cdot(1-1-x^2) = \underbrace{2x^2\cdot e^{-x^2}}_{>0}\cdot(-x) > 0 \Leftrightarrow -x > 0$$

$$\boxed{x < 0}$$

$\Rightarrow$ na $(-\infty; 0)$ rastie
na $(0; \infty)$ klesá

d) $f: y = \dfrac{e^x}{x+1}$; $\boxed{D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)}$

$$y' = \frac{e^x\cdot(x+1) - e^x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{e^x\cdot(x+1-1)}{(x+1)^2} = \underbrace{\frac{e^x}{(x+1)^2}}_{>0}\cdot x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow$$

na $(0; \infty)$ rastie
na $(-\infty; -1)$ a na $(-1; 0)$ klesá

e) $f: y = x - 2\cdot\ln x$; $\boxed{D(f) = (0; \infty)}$

$$y' = 1 - 2\cdot\frac{1}{x} = \frac{x-2}{x} > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0$$

$z\ D(f) \Rightarrow x > 0$

$$\boxed{x > 2}$$

$\Rightarrow$ na $(2; \infty)$ rastie
na $(0; 2)$ klesá

f) $f: y = 2x^2 - \ln x$; $\boxed{D(f) = (0; \infty)}$

$$y' = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x} \Leftrightarrow 4x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (2x-1)\underbrace{(2x+1)}_{>0} > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > \tfrac{1}{2}} \Rightarrow$$

$z\ D(f) \Rightarrow x > 0$

vždy, lebo $z\ D(f) \Rightarrow x > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow 2x + 1 > 0$

na $(\frac{1}{2}; \infty)$ rastie
na $(0; \frac{1}{2})$ klesá

5.3

g) $f: y = \ln(1-x)$; $D(f)$: $1-x>0$

$\underbrace{x<1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{D(f) = (-\infty; 1)}$

$y' = \frac{1}{1-x}\cdot(-1) = \frac{-1}{1-x}$ $\rightsquigarrow$ $\left.\begin{array}{l} -1<0 \text{ vždy} \\ 1-x>0 \text{ z } D(f) \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ $\frac{-1}{1-x}<0$ vždy $\Rightarrow$ klesá na $(-\infty; 1)$, t.j. na celom $D(f)$

h) $f: y = \ln(x^2-4)$; $D(f)$: $x^2-4>0$

$x^2>4$ $\Rightarrow$ $\boxed{D(f) = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)}$

$(x-2)(x+2)>0$

...

$y' = \frac{1}{x^2-4}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2-4} > 0 \Leftrightarrow 2x>0$, lebo x^2-4 je vždy >0 $(D(f))$

$\underbrace{x>0}$ $\Rightarrow$ na $(2; \infty)$ rastie

na $(-\infty; -2)$ klesá

i) $f: y = x\cdot\ln x$; $\boxed{D(f) = (0; \infty)}$

$y' = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1 > 0$

$\ln x > -1$ $\rightsquigarrow$ obe strany nerovnice dáme do exponentu e

$e^{\ln x} > e^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{a^{\log_a x} = x}$

$\underbrace{x > \frac{1}{e}}$ $\Rightarrow$ na $(\frac{1}{e}; \infty)$ rastie

na $(0; \frac{1}{e})$ klesá

5.3

j) $f: y = \frac{\ln x}{x}$; $\boxed{D(f) = (0; \infty)}$

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{\underset{>0}{x^2}} > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0$$

$$\ln x < 1$$

$$e^{\ln x} < e^1$$

$$\boxed{x < e} \Rightarrow$$

na $(0; e)$ rastie

na $(e; \infty)$ klesá

k) $f: y = \frac{\ln(3-x)}{3-x}$; $D(f)$: $3 - x > 0$

$x < 3 \Rightarrow \boxed{D(f) = (-\infty; 3)}$

$$y' = \frac{\frac{1}{3-x} \cdot (-1) \cdot (3-x) - \ln(3-x) \cdot (-1)}{(3-x)^2} = \frac{-1 + \ln(3-x)}{\underset{>0}{(3-x)^2}} > 0 \Leftrightarrow -1 + \ln(3-x) > 0$$

$$\ln(3-x) > 1$$

$$3 - x > e$$

$$\boxed{x < 3 - e} \Rightarrow$$

na $(-\infty; 3-e)$ rastie

na $(3-e; 3)$ klesá

l) $f: y = \ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$; $D(f)$: $\frac{x+2}{2-x} > 0 \Leftrightarrow (x+2 > 0 \wedge 2-x > 0) \vee (x+2 < 0 \wedge 2-x < 0)$

$(x > -2 \wedge x < 2) \vee (x < -2 \wedge x > 2)$ $\Rightarrow \boxed{D(f) = (-2; 2)}$

$(-2; 2)$

$$y' = \frac{1}{\frac{x+2}{2-x}} \cdot \frac{1 \cdot (2-x) - (x+2) \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x}{x+2} \cdot \frac{2 - x + x + 2}{(2-x)^2} = \frac{2-x}{x+2} \cdot \underbrace{\frac{4}{(2-x)^2}}_{>0} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x+2} > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (2 - x > 0 \wedge x + 2 > 0) \vee (2 - x < 0 \wedge x + 2 < 0)$

$(x < 2 \wedge x > -2) \vee (x > 2 \wedge x < -2)$ $\Rightarrow$ na $(-2; 2)$ rastie

5.3 m) $f: y = \frac{2}{x} + \ln x^2$; $\boxed{D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)}$

$$y' = -2x^{-2} + \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{-2+2x}{x^2} = \frac{2x-2}{\underbrace{x^2}_{>0}} > 0 \Leftrightarrow 2x-2>0 \;/:2$$

$$x-1>0$$

$$\underbrace{x>1}$$ $\Rightarrow$ na $(1;\infty)$ rastie

na $(-\infty;0)$ a na $(0;1)$ klesá

n) $f: y = \frac{x}{\ln x}$; $D(f): \underbrace{x>0} \wedge \ln x \neq 0$

$$\underbrace{x \neq 1} \Rightarrow \boxed{D(f) = (0;1) \cup (1;\infty)}$$

$$y' = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\underbrace{\ln^2 x}_{>0}} > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0$$

$$\ln x > 1$$

$$\underbrace{x > e} \Rightarrow$$ na $(e;\infty)$ rastie

na $(0;1)$ a na $(1;e)$ klesá

6.1 a) $f: y = x^3 - 9x^2 + 1$

$$y' = 3x^2 - 18x$$

$$y'' = 6x - 18 = 0$$

$$6x = 18$$

$x = 3 \rightarrow$ inflexný bod

$$y'' > 0$$

$$6x - 18 > 0$$

$x > 3 \Rightarrow$ funkcia konvexná, inak konkávna

$\Rightarrow$ na $(3;\infty)$ konvexná

na $(-\infty;3)$ konkávna

$x_0 = 3$ je inflexný bod